STAT0041: Stochastic Calculus

Lecture 8 - Brownian Motion and Heat Semigroup

Lecturer: Weichen Zhao Fall 2025

Key concepts:

- 布朗运动的$Makrov$性；
- 算子半群。

8.1 Markov性

我们首先回顾一些 Markov 过程中最基本的内容，更多内容可以参考：《随机过程基础(第三版)》，应坚刚，第二、四、五章。

Definition 8.1 (Markov过程) 设$\{X_t : t \in T\}$为一个$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathrm{P})$上 $\mathscr{F}_t$ 适应过程，状态空间为 $(E, \mathscr{E})$，那么下面论述是等价的：

(1) X 为一个$Markov$过程*;*

(2) 对所有$A \in \mathscr{E}, s < t \in T$,

$$\mathrm{P}(X_t \in A \mid \mathscr{F}_s) = \mathrm{P}(X_t \in A \mid X_s);$$

(3) 对所有E上有界可测函数 f，$s < t \in T$

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)|X_s] \quad a.s.$$

Definition 8.2 (转移函数) 设$(E, \mathscr{E})$为一个可测空间，我们称 $p(s, x; t, A)$, $s, t \in T$, $x \in E$, $A \in \mathscr{E}$ 为一个 $(E, \mathscr{E})$上的转移函数*(transition function)*，如果

(1) 对固定的s,t,x，$p(s,x;t,\cdot)$为$(E,\mathscr{E})$上的概率测度；

(2) 对固定的s,t,A，$p(s,\cdot;t,A)$为$\mathscr{E}$-可测函数；

(3) 对任意$s\in T$，$p(s,x;s,\cdot)=\delta_x(\cdot)$，其中$\delta_x$ 为在点 x 处的*Dirac* 测度；

(4) *(Kolmogorov-Chapman)* 对任意$s<t<u\in T$，$x\in E$， $A\in\mathscr{E}$，

$$p(s,x;u,A)=\int_E p(s,x;t,\mathrm{d}y)\,p(t,y;u,A). \tag{8.1}$$

进一步，如果存在 $p(t,x,A)$ 满足对所有$s\in T$，

$$p(s,x;s+t,A)=p(t,x,A),$$

我们称转移函数 p 是时齐的。

注. 可以证明，如果满足适当的条件，对一族转移函数，存在一个概率空间和其上的Markov过程，使得

$$\mathrm{P}(X_t\in A|X_s=x)=p(s,x;t,A)$$

表示Markov过程 s 时刻从 x 出发到时间 t 转移到 A 的概率。

Theorem 8.3 布朗运动为一个*Markov*过程，且转移函数为

$$p(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}}. \tag{8.2}$$

Proof: 引理 (《测度与概率教程》，任佳刚，巫静，P142，习题19)：设$(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$为一概率空间，$X,Y$为其上随机变量，$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$为一子事件域，$X$是$\mathscr{G}$可测的，$Y$是与$\mathscr{G}$独立的，那么对于任意Borel可测函数$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，有

$$\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathscr{G}]=\mathbb{E}[g(X,Y)|X].$$

想要证明布朗运动为一个Markov过程，即是证明：对所有E上有界可测函数f， $s<t\in T$

$$\mathbb{E}[f(B_t)|\mathscr{F}_s]=\mathbb{E}[f(B_t)|B_s]$$

我们有

$$\mathbb{E}[f(B_t)|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[f(B_t - B_s + B_s)|\mathscr{F}_s] \triangleq \mathbb{E}[g(B_t - B_s, B_s)|\mathscr{F}_s]$$

其中$\mathscr{F}_t$为B_t的自然σ代数流，由布朗运动的独立增量性质，$B_t - B_s$与 $\mathscr{F}_s$ 独立，由引理

$$\mathbb{E}[g(X_t - X_s, X_s)|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[g(X_t - X_s, X_s)|X_s] = \mathbb{E}[f(X_t)|X_s]$$

所以布朗运动为一个Markov过程。下面计算它的转移函数，由于布朗运动增量独立且 $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$，所以是时齐的，那么

$$\begin{aligned}
p(t, x, A) &= p(s, x; s+t, A) = p(0, x; t, A) \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(B_t)|B_0 = x] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(B_t - B_0 + B_0)|B_0 = x] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(B_t - B_0 + x)] = \int \mathbf{1}_A(z + x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz \\
&= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy.
\end{aligned}$$

■

8.2 算子半群

对状态空间为$(E, \mathscr{E})$的Markov过程X_t，我们定义:

$$(P_t f)(x) \triangleq \mathbb{E}[f(X_t)|X_0 = x] = \int f(y)p(t, x, y)dy.$$

其中

$$P_t : \mathcal{M}_b(E) \to \mathcal{M}_b(E),\ f \mapsto P_t f$$

为$\mathcal{M}_b(E)$上的算子，$\mathcal{M}_b(E)$ 为E上所有有界可测函数的集合。那么由Kolmogorov-Chapman方程， P_t满足半群(semigroup)性质

$$P_{t+s} f = P_t \circ P_s f.$$

我们称(P_t) 为一个 Markov 半群。

回忆有限状态离散时间的时齐Markov链中，t步转移矩阵为

$$P_t = P^t,\ t \in \mathbb{N}.$$

一旦我们知道了初始状态和一步转移矩阵P，这个马氏链就清楚的定义好了，我们也希望有这样一个东西能够描述连续时间的Markov过程，所以我们要引入无穷小生成元的定义。

Definition 8.4 (无穷小生成元) 设P_t为一个算子半群，定义算子

$$\mathcal{A}f := \lim_{t\downarrow 0} \frac{P_t f - f}{t}. \tag{8.3}$$

我们称$\mathcal{A}$为P_t的无穷小生成元*(infinitesimal generator)*，简称生成元。

注. 为了保证式(8.3)极限的存在性，严格来说，我们需要考虑

$$f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \triangleq \{f \in \mathcal{M}_b(E), \lim_{t\downarrow 0} \frac{P_t f - f}{t}\text{存在}\}.$$

什么样的函数能够保证在生成元算子的定义域中，数学家们发展了希尔伯特空间上的无界算子理论来回答。但我们更关心计算的部分，也就是Markov过程如何用半群、生成元来刻画，这就是下面要介绍的Kolmogorov 向后方程，这是随机过程课程里面的重要结果，我们的课程主要关心如何使用它。

Proposition 8.5 (Kolmogorov向前向后方程) 对所有$t \geq 0$，$f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$，有下面方程成立

$$\partial_t P_t f = P_t \mathcal{A} f = \mathcal{A} P_t f.$$

注. 由 Kolmogorov 方程，给定生成元$\mathcal{A}$，我们可以通过求解 Kolmogorov 方程得到半群P_t，即给出了 Markov 半群的一种构造方式。

当然，严格的泛函分析中，半群构造没有这么容易，严格的保证由Hille-Yosida定理给出(参考：《泛函分析讲义下册》，张恭庆，P155)，但是好在我们课程关心的生成元满足Hille-Yosida条件，下面我们具体地看看布朗运动这个例子。

8.3 布朗运动和热半群

本小节内容主要参考：GTM214, Jürgen Jost, Partial Differential Equations, Chapter 8

热核(heat kernel)定义为

$$K(t,x,y) \triangleq \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}.$$

因为对于连续有界函数 $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$u(x,t) \triangleq \int K(t,x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

是热方程 (heat equation)

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \frac{1}{2} \Delta u(x,t) = 0$$

的解。其中$\Delta \triangleq \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \nabla \cdot \nabla$ 为拉普拉斯算子。

下面命题说明了布朗运动和热方程之间的关系。

Proposition 8.6 设B_t为一个布朗运动，那么对于所有连续有界函数$f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，定义

$$P_t f(x) \triangleq \mathbb{E}[f(B_t)|B_0 = x] = \int p(t,x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

满足

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) = \frac{1}{2} \Delta P_t f(x),$$

其中$p(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$，并且布朗运动的无穷小生成元为 $\frac{1}{2}\Delta$.

Proof: 留作作业，按照定义证明。 ■

注. 布朗运动对应的半群P_t被称为热半群。